全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品智能作业

QUANPIN ZHINENGZUOYE

进阶手册

知识 · 易错 · 拓展

主　编　肖德好

高中数学

选择性必修第一册　RJA

CONTENTS 目录

进阶手册

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算

层级1 知识易错易混

【知识导图】

- 空间向量及其运算
  - 空间向量
    - 定义：空间中既有大小又有方向的量称为空间向量
    - 模(或长度)：空间向量的大小
    - 表示方法
      - ①几何表示法：可以用有向线段来直观的表示向量，如始点为A终点为B的向量，记为$\overrightarrow{AB}$，模为$|\overrightarrow{AB}|$；
      - ②字母表示法：可以用字母$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…表示，模为$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{c}|$，…
  - 基本概念
    - 零向量：长度为0的向量叫作零向量，记作$\boldsymbol{0}$
    - 单位向量：模为1的向量称为单位向量
    - 相等向量：方向相同且模相等的向量称为相等向量
    - 相反向量：长度相等而方向相反的向量称为相反向量
    - 平行向量：表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，就称这些向量为平行向量
    - 共面向量：平行于同一个平面的向量叫作共面向量
  - 共线定理
    - 对空间三点P，A，B可通过证明下列结论成立来证明三点共线：
    - (1)$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}(\lambda\in\mathbf{R})$；
    - (2)对空间任一点O，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}(t\in\mathbf{R})$；
    - (3)对空间任一点O，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x+y=1)$
  - 共面定理
    - 两个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线，则向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$共面的充要条件是存在唯一的有序实数对$(x，y)$，使$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$
    - 证明空间四点共面的四种方法.对空间四点P，M，A，B证明四点共面：
      - (1)$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}(x，y\in\mathbf{R})$；
      - (2)对空间任一点O，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}(x，y\in\mathbf{R})$；
      - (3)$\overrightarrow{PM}/\!/\overrightarrow{AB}$(或$\overrightarrow{PA}/\!/\overrightarrow{MB}$或$\overrightarrow{PB}/\!/\overrightarrow{AM}$)；
      - (4)对空间任一点O，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OM}+y\overrightarrow{OA}+z\overrightarrow{OB}(x+y+z=1)$
  - 数量积
    - 定义:两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle$叫作$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的数量积，记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$
    - ①投影向量：$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$；
    - ②数量积的几何意义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle$
    - 空间向量数量积的性质：①$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$；③$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；④$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；⑤$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律)

【易错易混】类比平面向量与空间向量概念

向量的两个要素：大小和方向.

例1 (多选题)下列命题是假命题的是 (　　)

A. 若分别表示空间两向量的有向线段所在的直线是异面直线，则这两个向量不是共面向量

B. “$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”是“向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的必要不充分条件

C. 与实数类似，对于两个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，有$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$三种大小关系

D. 若两个非零向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$满足$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{0}$，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线

【答案】AC

【解析】对于A，因为空间中任意两向量平移之后都可以共面，所以空间中任意两向量均共面，故A中命题是假命题；对于B，若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的模相等，方向不一定相同，若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的模相等，方向也相同，所以"$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$"是"向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$"的必要不充分条件，故B中命题为真命题；对于C，向量不能比较大小，只能对向量的模进行比较，故C中命题是假命题；对于D，因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$，所以$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，故$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，故D中命题是真命题. 故选AC.

层级2 解题方法拓展

【方法解读1】空间向量线性运算的应用

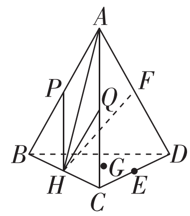
空间向量的运算类似于平面向量的运算. 向量加法运算的技巧是"首尾相接"，结果为第一个向量的起点指向最后一个向量的终点；向量减法运算的技巧是"起点相同"，结果为减向量的终点指向被减向量的终点.

例2 在空间四边形$ABCD$中，G为$\triangle BCD$的重心，E,F,H分别为CD,AD和BC的中点，化简下列各表达式.

(1)$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$；

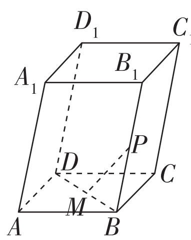
(2)$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$.

解：(1)$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}$.



(2)如图，分别取AB,AC的中点P,Q，连接PH,QH,AH,FH，则四边形$APHQ$为平行四边形，且$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AH}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}$，则$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AH}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FH}$.

例3 如图，在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是边长为2的正方形，侧棱$AA_1=4$，且$\angle A_1AD=\angle A_1AB=60°$，$M$为$BD$的中点，$P$为$BB_1$的中点，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$.



(1)用向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示向量$\overrightarrow{PM}$；

(2)求线段PM的长度.

解：(1)因为M为BD的中点，P为BB_1的中点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，

所以$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$.

(2)因为在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是边长为2的正方形，侧棱$AA_1=4$，且$\angle A_1AD=\angle A_1AB=60°$，所以$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=4$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2\times4\times\frac{1}{2}=4$，

所以$|\overrightarrow{PM}|^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=\frac{1}{4}\times(4+4+16-0-8+8)=6$，

所以$|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{6}$，即线段$PM$的长度为$\sqrt{6}$.

【方法解读2】证明空间三点共线的思路

对于空间三点P,A,B，可通过下列结论来证明P,A,B三点共线：

①存在实数λ，使$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$成立；②对空间中任一点$O$，有$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x+y=1)$.

【方法解读3】共面向量定理的推论

推论：对于空间四点P,M,A,B，若P,M,A,B四点共面，则

①存在实数x,y，使$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$成立；

②对空间中任一点O，存在实数x,y，使$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$成立；

③对空间中任一点O，有$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OM}(x+y+z=1)$.

应用：证明三个向量共面或证明四点共面或直线平行于平面.

例 4 已知 A,B,C 三点不共线，O 是平面 ABC 外一点，点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

(1)$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 三个向量是否共面？

(2)点 M 是否在平面 ABC 内？

解：(1)由题意知 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM}$，$\therefore\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})$，$\therefore\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$，

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 共面.

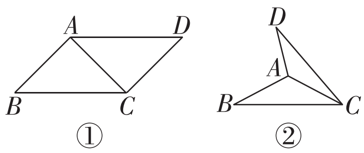
(2)由(1)知向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 共面，

$\because$ 它们有共同的起点 M，且 A,B,C 三点不共线，

$\therefore M,A,B,C$ 四点共面，即点 M 在平面 ABC 内.

【方法解读 4】利用空间向量求距离

例 5 如图①，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=1$，$\angle ACD=90^\circ$，沿着对角线 AC 将 $\triangle ACD$ 折起，使 AB 与 CD 所成的角为 60°(如图②)，求此时 B,D 间的距离.



解：由平行四边形的性质可得 $\angle BAC=90^\circ$，$CD=AB=1$，因为 $\angle ACD=90^\circ$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，同理，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

折叠后，因为 AB 与 CD 所成的角为 60°，所以 $\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=60^\circ$ 或 120°.

连接 BD，因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$，

所以 $|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=3+2\times1\times1\times\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle$.

若 $\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=60^\circ$，则 $|\overrightarrow{BD}|^2=4$，此时 $|\overrightarrow{BD}|=2$；

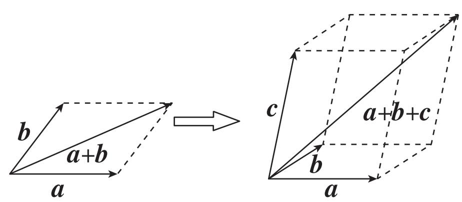
若 $\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=120^\circ$，则 $|\overrightarrow{BD}|^2=2$，此时 $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{2}$.

综上，B,D 间的距离为 2 或 $\sqrt{2}$.

【教材拓展 1】类比平面向量与空间向量

(1)几何法则：

平行四边形法则 $\Rightarrow$ 平行六边形法则



(2)特征向量：

①概念：共线向量 $\Rightarrow$ 共面向量

②定理：共线向量定理 $\Rightarrow$ 共面向量定理

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R})$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面($\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线)$\Leftrightarrow\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}(x,\ y\in\mathbf{R})$

(3)特征式：

若 M 是线段 AB 的中点，则 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ $\Rightarrow$ 若 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

【教材拓展 2】共面定理推论的证明

在空间中,点 P 在平面 ABC 上的充要条件是:对空间任一点 O,存在实数 x,y,z 满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,且 $x+y+z=1$.

证明:充分性.因为点 P 在平面 ABC 上,

所以存在实数 λ,μ,使得 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\mu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$,

整理得 $\overrightarrow{OP}=(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$,

所以存在实数 $x=1-\lambda-\mu,y=\lambda,z=\mu$,满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,且 $x+y+z=1-\lambda-\mu+\lambda+\mu=1$,充分性成立.

必要性:因为 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,且 $x+y+z=1$,

所以 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+(1-x-y)\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}+x(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$,

即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=x(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$,即 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$,

由共面向量定理可得 P,A,B,C 四点共面,即点 P 在平面 ABC 上,必要性成立.

综上,原命题得证.

1.2 空间向量基本定理

层级1 知识易错易混

【知识导图】

- 空间向量基本定理
  - 基本定理
    - 如果三个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 不共面,那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$,存在唯一的有序实数组 (x,y,z),使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.
    - 特别地,当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 不共面时,若 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $x=y=z=0$
  - 基底
    - 空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底
    - 判断向量能否构成基底的基本思路及方法
      (1)基本思路: 判断三个空间向量是否共面, 若共面, 则不能构成基底;若不共面, 则能构成基底.
      (2)方法:①如果向量中存在零向量,则不能作为基底;如果存在一个向量可以用另外两个向量线性表示,则不能构成基底.②假设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$,运用空间向量基本定理,建立关于 λ,μ 的方程组,若方程组有解,则向量共面,不能作为基底;若方程组无解,则向量不共面,能作为基底.③依托正方体。用从同一顶点出发的三条棱对应的向量为基底,构造所需向量,判断它们是否共面.
  - 运用
    - 异面直线的夹角:采用数量积变形公式,$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$
    - 线面平行: $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R},\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$
    - 线面垂直: $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

【易错易混 1】空间向量基底判断

基底的判断思路:判断给出的三个向量能否构成基底,关键是要判断这三个向量是否共面.首先应考虑三个向量中是否有零向量,其次判断三个非零向量是否共面.如果从正面难以入手判断,那么可假设三个向量共面,利用向量共面的充要条件建立方程(组),若方程(组)的解唯一,则三个向量共面;否则,三个向量不共面.

例 1 给出下列命题:

①若 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底,$\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,$\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}$ 可以构成空间的一个基底;

②若向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与任何向量都不能构成空间的一个基底;

③A,B,M,N 是空间中四点,如果 $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN}$ 不能构成空间的一个基底,那么点 A,B,M,N 共面;

④已知 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底,若 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}$ 可以构成空间的一个基底.

其中真命题的个数是 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 D

【解析】对于①，若$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间的一个基底，$\boldsymbol{d}$与$\boldsymbol{c}$共线且$\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}$不共面，故$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}$可以构成空间的一个基底，故①为真命题；对于②，若向量$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$与任何向量都共面，故$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$与任何向量都不能构成空间的一个基底，故②为真命题；对于③，$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN}$不能构成空间的一个基底，则$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN}$共面，故点$A,B,M,N$共面，故③为真命题；对于④，假设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}$共面，则存在$x,y\in\mathbf{R}$，使$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}$，即$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，即$(x-1)\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，故$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$也共面，与题设矛盾，所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}$不共面，故$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}$可以构成空间的一个基底，故④为真命题. 综上，①②③④均为真命题. 故选 D.

【易错易混 2】向量共线定理、平面向量基本定理与空间向量基本定理

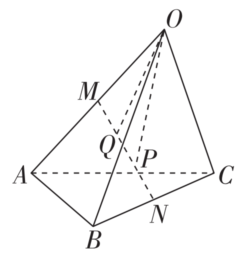
定理 分类	向量共线定理	平面向量基本定理	空间向量基本定理
表述形式	$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$
基向量个数	1	2	3
基向量要求	$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不共线	$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面
对于实数(对、组)	λ	(x,y)	(x,y,z)

层级2 解题方法拓展

【方法解读 1】用基底表示空间向量

空间中任意一个向量在基向量上的分向量是唯一确定的，即若基底为$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$，则在该基底下与$\boldsymbol{p}$对应的有序实数组$(x,y,z)$唯一.

例 2 如图所示，在四面体$OABC$中，M,N分别是OA,BC的中点，P,Q是MN的两个三等分点(点P靠近点N，点Q靠近点M).



(1)用基底$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$表示向量$\overrightarrow{OP}$；

(2)若$\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，求实数$x,y,z$的值.

解：(1)连接ON，则$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{ON}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

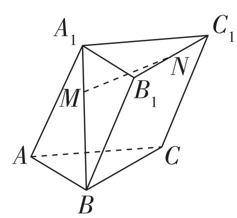
(2)由题意得Q为MP的中点，$\therefore\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP})=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$，

又$\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，$\therefore x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{6},z=\frac{1}{6}$.

【方法解读 2】利用空间向量证明平行与垂直关系

利用空间向量基本定理证明四点共面或线面平行. 如果$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}(x,y\in\mathbf{R})$，那么$P,A,B,C$四点共面，即点$P$在平面$ABC$内；如果$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}(x,y\in\mathbf{R})$，$O$为不在平面$ABC$内的一点，那么$OP/\!/$平面$ABC$. 证明线面平行也可以证明直线与平面内某一直线平行. 证明面面平行可采用证明一平面内有两条相交直线与另一平面平行.

例 3 如图所示，在三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，M,N分别是A_1B,B_1C_1上的点，且$BM=2MA_1$，$B_1N=2NC_1$. 用空间向量解决如下问题：



(1)若$\angle BAA_1=\angle CAA_1$，$AB=AC$，证明：$BC\perp AA_1$；

(2)证明：$MN/\!/$平面ACC_1A_1.

证明：(1)由题意得$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，且$\angle BAA_1=\angle CAA_1$，$AB=AC$，

所以$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AA_1}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|\cdot\cos\angle CAA_1-|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|\cdot\cos\angle BAA_1=0$，所以$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AA_1}$，即$BC\perp AA_1$.

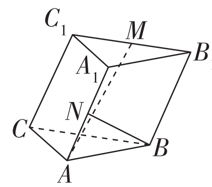
(2)由题意得 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1N}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{C_1B_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1})+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AC}$ 共面，

又 $MN\not\subset$ 平面 ACC_1A_1，$AA_1\cap AC=A$，$AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，$AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $MN//$ 平面 ACC_1A_1.

【方法解读 3】利用空间向量求线段长、异面直线所成的角

例 4 如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=2AC=2$，$\angle BAC=120°$，$\angle A_1AB=60°$，$AA_1\perp AC$，M，N 分别是 B_1C_1，AA_1 的中点.



(1)求 AM 的长；

(2)求 AM 与 BN 所成角的余弦值.

解：(1)由题可得 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}$，

因为 M 是 B_1C_1 的中点，所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

因为 $AB=AA_1=2AC=2$，$\angle BAC=120°$，$\angle A_1AB=60°$，$AA_1\perp AC$，

所以 $\overrightarrow{AM}^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+$

$|\overrightarrow{AA_1}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AA_1}|\cos 60°+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 120°+|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AA_1}|\cos 90°=\frac{1}{4}\times 4+4+\frac{1}{4}\times 1+2+$

$\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{4}$，所以 $AM=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2)因为 N 是 AA_1 的中点，$AB=AA_1=2AC=2$，$\angle A_1AB=60°$，

所以 $BN=\sqrt{2^2+1^2-2\times 2\times 1\times\cos 60°}=\sqrt{3}$.

由题可得 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}$，由(1)可得 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

设 AM 与 BN 所成的角为 θ，

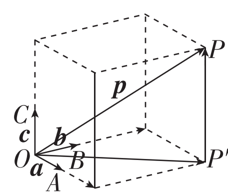
则 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}\right|=\left|\frac{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}\right)}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}\right|=\left|\frac{-1}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}}\right|=\frac{2}{9}$，

所以 AM 与 BN 所成角的余弦值为 $\frac{2}{9}$.

【教材拓展】空间向量基本定理的证明

例 5 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是空间中三个不共面的向量，则对空间中任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的一组实数 (x,y,z)，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

证明：存在性. 如图，以空间任意一点 O 为起点，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$.



过点 P 作直线平行于 $\overrightarrow{OC}$，交平面 OAB 于点 P'，则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'P}$.

①$\overrightarrow{P'P}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行，因此存在唯一的实数 z，使得 $\overrightarrow{P'P}=z\boldsymbol{c}$.

②点 P' 在平面 OAB 内，根据平面向量基本定理，知存在唯一的实数对 (x,y)，使得 $\overrightarrow{OP'}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

综上，$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'P}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，存在性得证.

唯一性. 假设存在两组不同的实数 (x_1,y_1,z_1) 和 (x_2,y_2,z_2) 使得 $\boldsymbol{p}=x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}+z_1\boldsymbol{c}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}+z_2\boldsymbol{c}$，则 $(x_1-x_2)\boldsymbol{a}+(y_1-y_2)\boldsymbol{b}+(z_1-z_2)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，故必有 $x_1-x_2=0$，$y_1-y_2=0$，$z_1-z_2=0$，即 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$，与假设矛盾，因此，该表示法具有唯一性.

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

层级1 知识易错易混

【知识导图】

- 空间向量及其运算的坐标表示
  - 空间坐标
    - 定义：在空间直角坐标系$Oxyz$中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$为坐标向量，由空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组(x, y, z)，使$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，有序实数组$(x, y, z)$叫作$\boldsymbol{a}$在空间直角坐标系$Oxyz$中的坐标，记作$\boldsymbol{a}=(x, y, z)$
    - 右手直角坐标系：右手拇指指向x轴的正方向，食指指向y轴的正方向，如果中指指向z轴的正方向，则称这个坐标系为右手直角坐标系
    - 注意：空间向量的坐标与原点的选择无关，坐标位置不同，只会影响计算的繁简，不会影响结果
    - 一般要求：尽量使问题中涉及的点落在坐标轴上
  - 坐标运算
    - 设空间中两个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$.
    - ①$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$；
    - ②若u，v是两个实数，则$u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}=(ux_1+vx_2, uy_1+vy_2, uz_1+vz_2)$；
    - ③$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$；
    - ④$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$；
    - ⑤当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$且$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$时，$\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$；
    - ⑥当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(x_2, y_2, z_2)=\lambda(x_1, y_1, z_1)\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\lambda x_1,\\y_2=\lambda y_1,\\z_2=\lambda z_1;\end{cases}$
      当$\boldsymbol{a}$的每一个坐标分量都不为零时，有$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{z_2}{z_1}$；
    - ⑦$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

【易错易混】对空间直角坐标系的理解

(1)在空间直角坐标系中，让右手拇指指向x轴的正方向，食指指向y轴的正方向，如果中指指向z轴的正方向，则称这个坐标系为右手直角坐标系.

(2)在数轴上确定一个点的位置只需一个实数，在平面直角坐标系中需一对有序实数来确定一个点的位置，在空间直角坐标系中则需要三个实数组成的有序实数组(x,y,z)才能确定一个点的位置.

(3)确定空间某个点的坐标除了利用点到坐标平面的距离外，还可用几何图形的特点.比如中点坐标：在空间直角坐标系中，已知$P_1(x_1,y_1,z_1)$和$P_2(x_2,y_2,z_2)$，则线段P_1P_2的中点P_0的坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$.

(4)若四边形$ABCD$是平行四边形，则向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$的坐标相同.

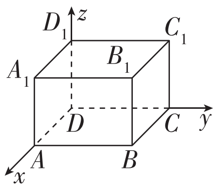
层级2 解题方法拓展

【方法解读1】建立空间直角坐标系的方法

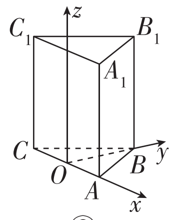
(1)利用共顶点的互相垂直的三条棱构建空间直角坐标系，如长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，如图①；

(2)利用线面垂直关系构建空间直角坐标系，如直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$，如图②；

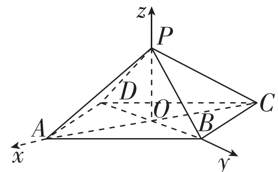
(3)利用面面垂直关系构建空间直角坐标系，如正四棱锥$P\text{-}ABCD$，如图③.



①



②

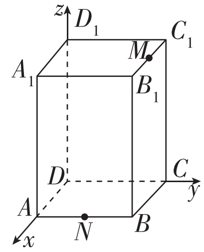


③

【方法解读 2】求点与空间向量的坐标

空间向量坐标的求解:根据题设条件,建立适当的空间直角坐标系,先求出相关点的坐标,再写出向量的坐标.

例 1 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC=2$,$D_1D=3$,点 M 是 B_1C_1 的中点,点 N 是 AB 的中点.建立如图所示的空间直角坐标系,写出点 D,N,M 的坐标.



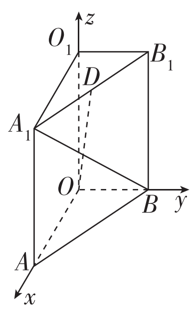
解:因为 D 是原点,所以 $D(0,0,0)$.

由 $AB=BC=2$,$D_1D=3$,得 $A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$B_1(2,2,3)$,$C_1(0,2,3)$.

因为 N 是 AB 的中点,所以 $N(2,1,0)$,

同理可得 $M(1,2,3)$.

例 2 在直三棱柱 $ABO\text{-}A_1B_1O_1$ 中,$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$,$AO=4$,$BO=2$,$AA_1=4$,$D$ 为 A_1B_1 的中点,在如图所示的空间直角坐标系中,求 $\overrightarrow{DO}$,$\overrightarrow{A_1B}$ 的坐标.



解:设$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$为空间的一个单位正交基底,$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向,则 $\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OO_1}=4\boldsymbol{k}$.

连接 O_1D,则 $\overrightarrow{DO}=-\overrightarrow{OD}=-(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1D})=-\left[\overrightarrow{OO_1}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right]=-\overrightarrow{OO_1}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,所以 $\overrightarrow{DO}=(-2,-1,-4)$.

连接 OA_1,则 $\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA_1})=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OO_1}=-4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,

所以 $\overrightarrow{A_1B}=(-4,2,-4)$.

【方法解读 3】求解向量运算的坐标表示问题

通常利用坐标运算的公式进行求解.

例 3 已知 O 是原点,且 A,B,C 三点的坐标分别是$(2,-1,2)$,$(4,5,-1)$,$(-2,2,3)$,求适合下列条件的点 P 的坐标.

(1)$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$;

(2)$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$.

解:由题意知,$\overrightarrow{AB}=(2,6,-3)$,$\overrightarrow{AC}=(-4,3,1)$.

(1)$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{2}(6,3,-4)=\left(3,\dfrac{3}{2},-2\right)$,则点 P 的坐标为$\left(3,\dfrac{3}{2},-2\right)$.

(2)设 $P(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x-2,y+1,z-2)$.

因为 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\left(3,\frac{3}{2},-2\right)$，所以 $\begin{cases}x-2=3,\\ y+1=\frac{3}{2},\\ z-2=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\ y=\frac{1}{2},\\ z=0,\end{cases}$

则点 P 的坐标为 $\left(5,\frac{1}{2},0\right)$.

【方法解读 4】空间向量平行、垂直的坐标表示及应用

利用空间向量证明垂直、平行的一般步骤：

(1)建立空间直角坐标系，建系时要尽可能地利用条件中的垂直关系.

(2)建立空间图形与空间向量之间的关系，用空间向量表示出问题中所涉及的点、直线、平面的要素.

(3)通过空间向量的运算求出直线的方向向量，再研究平行、垂直关系.

(4)根据运算结果解释相关问题.

例 4 已知 $\boldsymbol{p}=(1,1,a)(a>0)$，$\boldsymbol{q}=(2,b,1)$，$\boldsymbol{r}=(c,1,0)(c>0)$.

(1)若 $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})/\!/(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$，求 a，b 的值；

(2)若 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{2}$ 且 $(\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q})\perp(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})$，求 a，c 的值.

解：(1)由题意得，$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=(3,1+b,a+1)$，$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}=(-1,1-b,a-1)$，

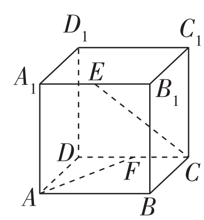
$\because(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})/\!/(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$，$\therefore\begin{cases}1+b=-3(1-b),\\ a+1=-3(a-1),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=2.\end{cases}$

(2)由题意得，$\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}=(-3,1-2b,a-2)$，$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}=(1-c,0,a)$，

$\because|\boldsymbol{r}|=\sqrt{2}$ 且 $(\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q})\perp(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})$，$\therefore\begin{cases}\sqrt{c^2+1}=\sqrt{2},\\ -3(1-c)+a(a-2)=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=2,\\ c=1.\end{cases}$

【方法解读 5】利用空间向量的坐标运算求夹角及长度

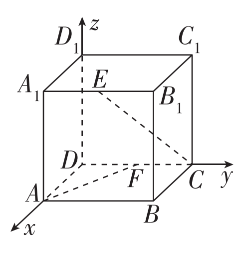
例 5 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 A_1B_1，CD 的中点.



(1)求 CE 的长；

(2)求异面直线 CE 与 AF 所成角的余弦值.

解：(1)在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(2,0,0)$，$F(0,1,0)$，$C(0,2,0)$，$E(2,1,2)$，所以 $\overrightarrow{CE}=(2,-1,2)$，所以 $|\overrightarrow{CE}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$，故 $CE=3$.



(2)由(1)可得 $\overrightarrow{CE}=(2,-1,2)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,1,0)$，设异面直线 CE 与 AF 所成的角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CE},\overrightarrow{AF}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\overrightarrow{AF}|}=\frac{|-4-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\times\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

所以异面直线 CE 与 AF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

1.4 空间向量的应用

层级1 知识易错易混

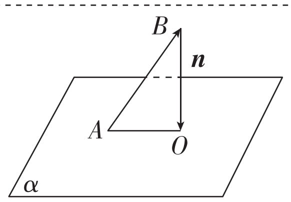
【知识导图】

空间向量的应用

- **法向量**
  - (1)设出平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$；
  - (2)找出平面内两个不共线的已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标；
  - (3)建立关于 x，y，z 的方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0;\end{cases}$
  - (4)解方程组
- **空间位置**

位置关系			向量表示
线线位置关系	直线 l_1，l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$	$l_1 // l_2$	$\boldsymbol{n}_1 // \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1=k\boldsymbol{n}_2(k\in\mathbf{R})$
		$l_1 \perp l_2$	$\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$
线面位置关系	直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{n}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{m}$	$l // \alpha$	$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{m}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$
		$l\perp\alpha$	$\boldsymbol{n}//\boldsymbol{m}\Leftrightarrow \boldsymbol{n}=k\boldsymbol{m}(k\in\mathbf{R})$
面面位置关系	平面 α，β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$	$\alpha // \beta$	$\boldsymbol{n}//\boldsymbol{m}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}=k\boldsymbol{m}(k\in\mathbf{R})$
		$\alpha\perp\beta$	$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{m}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$

- **空间角**
  - 线线角：设异面直线 a，b 所成的角为 θ，a，b 的方向向量分别 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$
  - 线面角：直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，φ 为 l 与 α 所成的角，则 $\sin\varphi=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{n}|}$，$\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$
  - 面面角：平面 α 和平面 β 的夹角为 θ，$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是 α，β 的法向量，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$，$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$
- **空间距离**
  - 已知 AB 为平面 α 的一条斜线段，点 B 在平面 α 上的射影为点 O，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，则点 B 到平面 α 的距离为 $|\overrightarrow{BO}|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$



【易错易混 1】求空间距离记错公式

例 1 已知点 $A(1,1,1)$，直线 l 过原点 O 且一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(0,1,2)$，则点 A 到直线 l 的距离为 ( )

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$　　B. 1　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{35}}{5}$

[答案] A

[解析] 由题知 $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$，则点 A 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2-\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)^2}=\sqrt{3-\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$. 故选 A.

【易错易混 2】异面直线夹角取值范围出错

例 2 已知向量 $\boldsymbol{m}$,$\boldsymbol{n}$ 分别是直线 l 的方向向量和平面 α 的法向量,若 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=-\frac{1}{2}$,则 l 与 α 所成的角为________.

[答案] $30°$

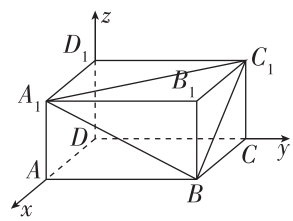
[解析] 设 l 与 α 所成的角为 θ,$\because \cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=-\frac{1}{2}$,$\therefore \sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{1}{2}$,又 $0°\leqslant\theta\leqslant 90°$,$\therefore\theta=30°$.

【易错易混 3】线面角、二面角取值范围出错

线面角的取值范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,二面角的取值范围是 $[0,\pi]$.

例 3 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=2$,$BC=AA_1=1$,则 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为________,平面 BA_1C_1 与平面 $A_1C_1D_1$ 的夹角的余弦值为________.

[答案] $\frac{1}{3}$　$-\frac{2}{3}$



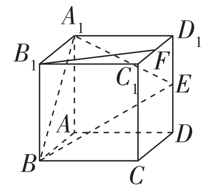
[解析] 以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $D_1(0,0,1)$,$C_1(0,2,1)$,$A_1(1,0,1)$,$B(1,2,0)$,$\therefore\overrightarrow{D_1C_1}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,2,0)$,$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-1)$.设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+2y=0,\\ 2y-z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$.设 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{D_1C_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{D_1C_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{D_1C_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{2\times 3}=\frac{1}{3}$,即直线 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$.易知平面 $A_1C_1D_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,设平面 BA_1C_1 与平面 $A_1C_1D_1$ 的夹角为 α,则 $\cos\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{1\times 3}=\frac{2}{3}$,故平面 BA_1C_1 与平面 $A_1C_1D_1$ 的夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

层级2 解题方法拓展

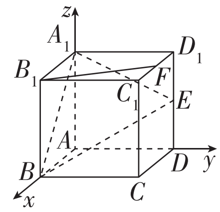
【方法解读 1】空间平行关系的解题策略

	几何法	向量法
线线平行	对于三条不同的直线 l,m,n 和两个不同的平面 α,β, (1)若 $l/\!/m$,$l/\!/n$,则 $m/\!/n$; (2)若 $l\perp\alpha$,$m\perp\alpha$,则 $l/\!/m$; (3)若 $l/\!/\alpha$,$l\subset\beta$,$\alpha\cap\beta=m$,则 $l/\!/m$	若两条不同的直线 l,m 的方向向量共线,则 $l/\!/m$
线面平行	对于两条不同的直线 m,n 和平面 α, (1)若 $m\perp\alpha$,$m\perp n$,$n\not\subset\alpha$,则 $n/\!/\alpha$; (2)若 $m\not\subset\alpha$,$n\subset\alpha$,$m/\!/n$,则 $m/\!/\alpha$	若直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量垂直且 $l\not\subset\alpha$,则 $l/\!/\alpha$
面面平行	对于两条不同的直线 l,m 和两个不同的平面 α,β, (1)若 $l\subset\alpha$,$m\subset\alpha$,$l/\!/\beta$,$m/\!/\beta$,且 $l\cap m=A$,则 $\alpha/\!/\beta$; (2)若 $l\perp\alpha$,$l\perp\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$	若两个不同的平面 α,β 的法向量共线,则 $\alpha/\!/\beta$

例 4 如图,在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别为棱 DD_1,C_1D_1 的中点.求证:B_1F//平面 A_1BE.



证明:以 A 为坐标原点,AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



由题意得 $B(2,0,0)$,$A_1(0,0,2)$,$B_1(2,0,2)$,$E(0,2,1)$,$F(1,2,2)$,

$\therefore \overrightarrow{BE}=(-2,2,1)$,$\overrightarrow{BA_1}=(-2,0,2)$,$\overrightarrow{B_1F}=(-1,2,0)$.

设平面 A_1BE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{BA_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2y+z=0,\\-2x+2z=0,\end{cases}$

令 $x=2$,得 $y=1$,$z=2$,$\therefore \boldsymbol{n}=(2,1,2)$.

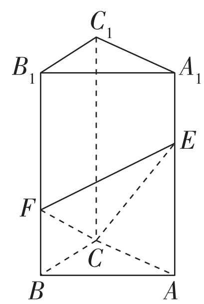
$\because \overrightarrow{B_1F}\cdot\boldsymbol{n}=-2+2+0=0$,$\therefore \overrightarrow{B_1F}\perp\boldsymbol{n}$,

又 $B_1F\not\subset$ 平面 A_1BE,$\therefore B_1F$//平面 A_1BE.

【方法解读 2】空间垂直关系的解题策略

	几何法	向量法
线线垂直	(1)证明两直线所成的角为 90°; (2)若直线与平面垂直,则此直线与平面内所有直线垂直	两直线的方向向量互相垂直
线面垂直	对于三条不同的直线 l,m,n 和平面 α, (1)若 $l\perp m$,$l\perp n$,$m\subset\alpha$,$n\subset\alpha$,m 与 n 相交,则 $l\perp\alpha$; (2)若 l//m,$m\perp\alpha$,则 $l\perp\alpha$	(1)证明直线的方向向量分别与平面内两条相交直线的方向向量垂直; (2)证明直线的方向向量与平面的法向量平行
面面垂直	对于两条不同的直线 l,m 和两个不同的平面 α,β, (1)若 $l\perp\alpha$,$l\subset\beta$,则 $\alpha\perp\beta$; (2)若 $l\perp\alpha$,$m\perp\beta$,$l\perp m$,则 $\alpha\perp\beta$	证明两个平面的法向量互相垂直

例 5 如图,在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$AB=2$,$AA_1=3$,E,F 分别是棱 AA_1,BB_1 上的点,$A_1E=BF=\frac{1}{3}AA_1$.证明:平面 $CEF\perp$ 平面 ACC_1A_1.

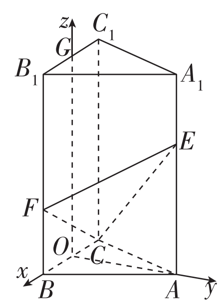


证明: 分别取 BC,B_1C_1 的中点 O,G,连接 OA,OG,

在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$\triangle ABC$ 为正三角形,

所以 $OA\perp BC$.因为 OG//BB_1,$BB_1\perp$ 平面 ABC,所以 $OG\perp$ 平面 ABC,所以 OB,OA,OG 两两垂直.

以 O 为坐标原点,OB,OA,OG 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,如图所示,



因为 $AB=2$,$AA_1=3$ 且 $A_1E=BF=\frac{1}{3}AA_1=1$,

所以 $C(-1,0,0)$,$A(0,\sqrt{3},0)$,$F(1,0,1)$,$E(0,\sqrt{3},2)$,$C_1(-1,0,3)$,

则 $\overrightarrow{CF}=(2,0,1)$,$\overrightarrow{CE}=(1,\sqrt{3},2)$,$\overrightarrow{CA}=(1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,3)$.

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+z=0,\\x+\sqrt{3}y+2z=0,\end{cases}$

令 $x=-1$,则 $\boldsymbol{n}=(-1,-\sqrt{3},2)$.

设平面 ACC_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+\sqrt{3}b=0,\\3c=0,\end{cases}$

令 $b=-1$,则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,0)$.

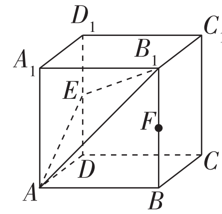
因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$,所以 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,所以平面 $CEF\perp$ 平面 ACC_1A_1.

【方法解读 3】空间距离

(1)点到直线的距离：一般先计算所求点与直线上某一点所构成的向量在直线上的投影向量的长度，再利用勾股定理求解.

(2)空间线面、面面距离问题：一般转化为点面距离问题解决.若点 B 为平面 α 外一点，点 A 为平面 α 内任意一点，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则点 B 到平面 α 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

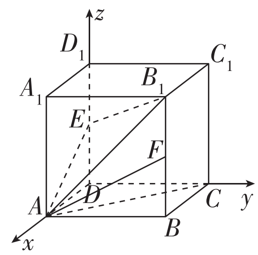
例 6 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 DD_1 的中点，F 为棱 BB_1 的中点.



(1)求点 F 到直线 AE 的距离；

(2)求点 C 到平面 AB_1E 的距离.

解:(1)以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，连接 AF.



因为正方体的棱长为 2，且 E 为棱 DD_1 的中点，F 为棱 BB_1 的中点，

所以 $E(0,0,1)$，$F(2,2,1)$，$A(2,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{AF}=(0,2,1)$，所以 $\dfrac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

又 $\overrightarrow{AF}^2=2^2+1^2=5$，所以点 F 到直线 AE 的距离为 $\sqrt{5-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$.

(2)连接 AC，由(1)得 $B_1(2,2,2)$，$C(0,2,0)$，

则 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AE}=(-2,0,1)$.

设平面 AB_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y+2z=0,\\ -2x+z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=-2$，$z=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$，

所以点 C 到平面 AB_1E 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{6}{3}=2$.

【方法解读 4】空间角

(1)向量法求直线与平面所成的角的步骤：

①分析图形中的位置关系，建立空间直角坐标系；

②求出直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 和平面的法向量 $\boldsymbol{n}$；

③求出夹角 $\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\rangle$；

④判断直线与平面所成的角 θ 和 $\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\rangle$ 的关系，求出角 θ.

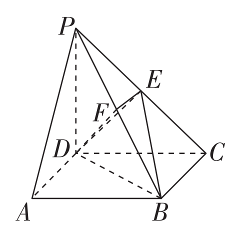
(2)设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，则向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角(或其补角)就是两个平面的夹角 θ，用坐标法的解题步骤如下：

①建系：依据几何条件建立适当的空间直角坐标系；

②求法向量：在建立的空间直角坐标系下求两个平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$；

③计算：$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$.

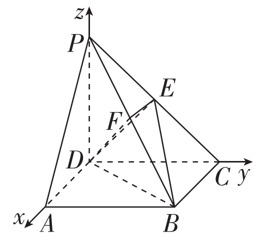
例 7 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=AD$，E 是 PC 的中点，点 F 在棱 PB 上.



(1)若 F 是 PB 的中点，求直线 EF 与平面 EDB 所成角的余弦值；

(2)若 $EF\perp PB$，求平面 DEF 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值.

解:(1)由题意知 DA,DC,DP 两两垂直,以 D 为坐标原点,DA,DC,DP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



不妨设 $DC=2$,则 $D(0,0,0)$,$B(2,2,0)$,$P(0,0,2)$,$E(0,1,1)$.

若 F 是 PB 的中点,则 $F(1,1,1)$,

故 $\overrightarrow{EF}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{DE}=(0,1,1)$.

设平面 EDB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{m}=2x_1+2y_1=0,\\ \overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{m}=y_1+z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=-1$,得 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$.

设直线 EF 与平面 EDB 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{EF}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,故直线 EF 与平面 EDB 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)由(1)知 $\overrightarrow{DE}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{PB}=(2,2,-2)$,因为 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,所以 $DE\perp PB$.

又 $EF\perp PB$,$DE\cap EF=E$,$DE\subset$平面 DEF,$EF\subset$平面 DEF,

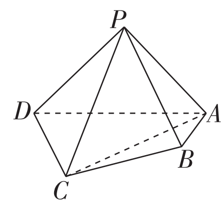
所以 $PB\perp$平面 DEF,

故平面 DEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{PB}=(2,2,-2)$,易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$.

设平面 DEF 与平面 $ABCD$ 的夹角为 φ,则 $\cos\varphi=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}\times1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

故平面 DEF 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

例 8 如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,$\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形,$AB\perp AD$,$AB=1$,$AD=4$,$AC=CD=2\sqrt{2}$.



(1)求证:$PD\perp$平面 PAB.

(2)求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值.

(3)在棱 PB 上是否存在点 M,使得平面 ADM 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$?若存在,求出$\dfrac{PM}{PB}$的值;若不存在,请说明理由.

解:(1)证明:$\because$平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,$AB\subset$平面 $ABCD$,$AB\perp AD$,$\therefore AB\perp$平面 PAD,又 $PD\subset$平面 PAD,$\therefore AB\perp PD$.

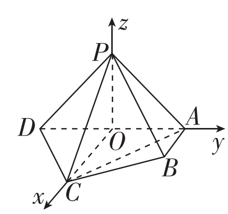
由题意得 $PD\perp PA$,$\because AB\cap PA=A$,$PA,AB\subset$平面 PAB,$\therefore PD\perp$平面 PAB.

(2)如图,设 AD 的中点为 O,连接 PO,CO,

由题意得 $PD=PA$,$\therefore PO\perp AD$,则 $AO=PO=DO=2$.

$\because AC=CD=2\sqrt{2}$,$AD=4$,

$\therefore AC^2+CD^2=AD^2$,$\therefore CD\perp CA$,$CO\perp AD$,$\therefore CO=\sqrt{AC^2-AO^2}=2$.



易知 OC,OA,OP 两两垂直,以 O 为坐标原点,OC,OA,OP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,如图,则 $P(0,0,2)$,$B(1,2,0)$,$D(0,-2,0)$,$C(2,0,0)$,

$\therefore\overrightarrow{PB}=(1,2,-2)$,$\overrightarrow{PD}=(0,-2,-2)$,$\overrightarrow{PC}=(2,0,-2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$为平面 PCD 的法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2y_1-2z_1=0,\\ 2x_1-2z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

设直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{|1-2-2|}{\sqrt{3}\times 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)假设在棱 PB 上存在点 M，使得平面 ADM 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

由(2)可知 $O(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$B(1,2,0)$，$P(0,0,2)$，$D(0,-2,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{AD}=(0,-4,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,2,-2)$.

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PB}=(\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=(\lambda,2\lambda-2,2-2\lambda)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 ADM 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\lambda x_2+(2\lambda-2)y_2+(2-2\lambda)z_2=0,\\ -4y_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=\lambda$，则 $\boldsymbol{m}=(2\lambda-2,0,\lambda)$.

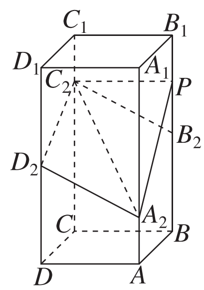
易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{OP}=(0,0,2)$.

设平面 ADM 与平面 $ABCD$ 的夹角为 α，

则 $\cos\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{OP}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{OP}|}\right|=\left|\dfrac{2\lambda}{\sqrt{(2\lambda-2)^2+\lambda^2}\times 2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{PM}{PB}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ 在棱 PB 上存在点 M，使得平面 ADM 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，且$\dfrac{PM}{PB}=\dfrac{1}{2}$.

【链接高考】

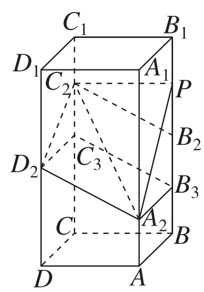


例 9 [2023·新课标Ⅰ卷] 如图，在正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$. 点 A_2，B_2，C_2，D_2 分别在棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$.

(1)证明：$B_2C_2/\!/A_2D_2$；

(2)点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P\text{-}A_2C_2\text{-}D_2$ 为 $150°$时，求 B_2P.

解：(1)证明：方法一：如图①，作 $A_2B_3/\!/AB$ 交 BB_1 于 B_3，$D_2C_3/\!/DC$ 交 CC_1 于 C_3，连接 B_3C_3，易知 $A_2B_3/\!/D_2C_3$，且 $A_2B_3=D_2C_3$，所以四边形 $A_2B_3C_3D_2$ 是平行四边形，所以 $A_2D_2/\!/B_3C_3$. 因为 $B_2B_3/\!/C_2C_3$，$B_2B_3=C_2C_3$，所以四边形 $B_2B_3C_3C_2$ 是平行四边形，所以 $B_3C_3/\!/B_2C_2$，所以 $B_2C_2/\!/A_2D_2$.



①

方法二：因为 $\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{DD_2}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A_2A}=\overrightarrow{A_2D_2}$，$B_2$，$C_2$，$A_2$，$D_2$ 四点不共线，所以 $B_2C_2/\!/A_2D_2$.

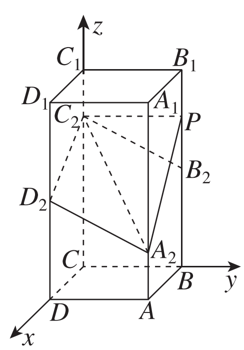
(2)方法一：如图②，以 C 为原点，以 CD，CB，CC_1 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A_2(2,2,1)$，$C_2(0,0,3)$，$D_2(2,0,2)$，设 $P(0,2,t)(0\leqslant t\leqslant 4)$，

则 $\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{A_2P}=(-2,0,t-1)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$分别为平面 $A_2C_2D_2$，A_2C_2P 的法向量，

则 $\begin{cases}-2x_1-2y_1+2z_1=0,\\ -2y_1+z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,2)$，同理 $\boldsymbol{n}_2=(t-1,3-t,2)$. 由题得$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\left|\dfrac{(t-1)+(3-t)+4}{\sqrt{6}\times\sqrt{(t-1)^2+(3-t)^2+4}}\right|$，整理得 $t^2-4t+3=0$，

解得 $t=1$ 或 $t=3$，则 $B_2P=|2-t|=1$.



②

方法二：如图③，连接 A_2B_2，易证四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 为菱形，连接 B_2D_2，设 A_2C_2 与 B_2D_2 相交于点 E.

因为二面角 $P\text{-}A_2C_2\text{-}D_2$ 为 $150°$，所以直线 B_2E 与平面 PA_2C_2 所成的角为 $30°$，

易知 $B_2E=\sqrt{2}$，所以点 B_2 到平面 PA_2C_2 的距离 $d_1=B_2E\sin 30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

连接 A_1B_2，A_1D_2，A_1E，A_1C_2，A_1P，由 $A_1B_2=A_1D_2=2\sqrt{2}$，得 $A_1E\perp B_2D_2$，

由 $A_1C_2=A_1A_2=3$，得 $A_1E\perp A_2C_2$，

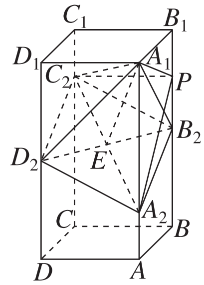
又 $A_2C_2\cap B_2D_2=E$，所以 $A_1E\perp$ 平面 $A_2B_2C_2$。因为二面角 $P\text{-}A_2C_2\text{-}D_2$ 为 $150°$，

所以 A_1E 与平面 PA_2C_2 所成的角为 $60°$，易知 $A_1E=\sqrt{6}$，

所以点 A_1 到平面 PA_2C_2 的距离 $d_2=A_1E\sin 60°=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$。所以$\dfrac{V_{A_1\text{-}PA_2C_2}}{V_{B_2\text{-}PA_2C_2}}=\dfrac{d_2}{d_1}=3$。

又 C_2 到平面 PA_1A_2 和平面 PA_2B_2 的距离都为 2（平面 PA_1A_2 和平面 PA_2B_2 为同一个平面），

所以$\dfrac{S_{\triangle PA_1A_2}}{S_{\triangle PA_2B_2}}=3$，所以 $A_1A_2=3B_2P=3$，解得 $B_2P=1$。

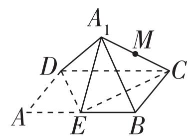


③

【方法解读 5】翻折问题

翻折问题的解题关键是要结合图形弄清翻折前后变与不变的关系，尤其是隐含的垂直关系，一般地翻折后还在一个平面上的性质不发生变化，不在同一平面上的性质发生变化.

例 10（多选题）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2$，E 为 AB 的中点，将$\triangle ADE$ 沿 DE 翻折至$\triangle A_1DE$，若 M 为 A_1C 的中点，则在翻折过程中，下列结论正确的是（　　）



A. 存在某个位置，使得 $DA_1\perp EC$

B. 存在某个位置，使得 $A_1C\perp$ 平面 A_1DE

C. 四棱锥 $A_1\text{-}DCBE$ 的体积的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

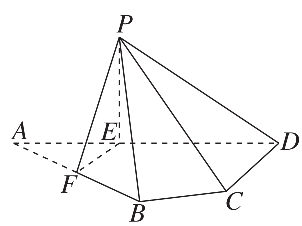
D. 点 M 在某个球面上运动

[答案] ACD

[解析] 对于 A，由题可知，$A_1D\perp A_1E$，若存在某个位置使得 $DA_1\perp EC$，则由 $A_1E\cap EC=E$，A_1E，$EC\subset$ 平面 A_1EC，得 $A_1D\perp$ 平面 A_1EC，又 $A_1C\subset$ 平面 A_1EC，所以 $A_1D\perp A_1C$，又 $AB=2AD=2$，所以 $A_1C=\sqrt{3}$，因为在折叠过程中，$A_1C\in(1,\sqrt{5})$，所以存在某个位置，使得 $A_1C=\sqrt{3}$，故存在某个位置，使得 $DA_1\perp EC$，故 A 正确. 对于 B，若存在某个位置，使得 $A_1C\perp$ 平面 A_1DE，则由 A_1D，$A_1E\subset$ 平面 A_1DE，得 $A_1C\perp A_1D$，$A_1C\perp A_1E$，因为 $DE=CE=\sqrt{2}$，$A_1D=A_1E=1$，$CD=2$，所以由 $A_1C\perp A_1E$ 可得 $A_1C=1$，由 $A_1C\perp A_1D$ 可得 $A_1C=\sqrt{3}$，因为 $A_1C=1$ 与 $A_1C=\sqrt{3}$ 不能同时成立，所以 $A_1C\perp$ 平面 A_1DE 不成立，故 B 错误. 对于 C，当四棱锥 $A_1\text{-}DCBE$ 的体积最大时，平面 $A_1DE\perp$ 平面 $DCBE$，因为$\triangle A_1DE$ 是等腰直角三角形，所以点 A_1 到平面 $DCBE$ 的最大距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以四棱锥 $A_1\text{-}DCBE$ 的体积的最大值为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(2+1)\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故 C 正确. 对于 D，取 DC 的中点 O，连接 OM，因为 M 为 A_1C 的中点，所以 $OM/\!/A_1D$，且 $OM=\dfrac{1}{2}A_1D=\dfrac{1}{2}$，为定值，所以 M 在以点 O 为球心的球面上，故 D 正确. 故选 ACD.

【链接高考】

例 11［2024·新课标Ⅱ卷］如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$CD=3$，$AD=5\sqrt{3}$，$\angle ADC=90°$，$\angle BAD=30°$，点 E，F 满足 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，将$\triangle AEF$ 沿 EF 翻折至$\triangle PEF$，使得 $PC=4\sqrt{3}$.



(1)证明：$EF\perp PD$；

(2)求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值.